

اعداد تقریبی و تخمین

(بخش دوم)

مطالبی برای افزایش دانش موضوعی ریاضی معلمان

در کتاب‌های درسی ریاضی دوره‌ی ابتدایی موضوع‌هایی هستند که یا دانش‌آموزان در یادگیری آن‌ها مشکل دارند یا معلمان در یاددهی آن‌ها. در این دوره از مجله‌ی رشد آموزش ابتدایی، در هر شماره درباره‌ی یکی از آن‌ها صحبت می‌کنیم. قصد نداریم در اینجا روش تدریس بیان کنیم، بلکه آن را به‌عنوان یک موضوع یا مفهوم ریاضی بررسی خواهیم کرد تا دانش موضوعی خود را برای تدریس بهتر آن افزایش دهیم.

تخمین زدن در زندگی روزمره بسیار کارگشاست، مانند زمانی که مجبوریم محاسباتی انجام دهیم؛ مثلاً قیمت کالایی را پس از تخفیف حساب کنیم یا برای اینکه ببینیم اصلاً در کارت بانکی مان به اندازه‌ی کافی پول داریم یا نه، باید مجموع خریده‌هایمان را به دست بیاوریم. این دست محاسبات را که غالباً با قیمت‌ها و خرج و دخلمان مرتبط است، می‌توانیم با راهبردهای محاسبات ذهنی، یا با استفاده از رویه‌های متداول محاسباتی، یا ماشین حساب انجام دهیم، اما در بسیاری از موارد، اصلاً نیازی به انجام محاسبه‌ی دقیق و یافتن مقدار دقیق مورد نظر نداریم و همین که تقریب خوبی از پاسخ داشته باشیم، برایمان کافی است. در اینجاست که موضوع تقریب اعداد و تخمین در محاسبات به میان می‌آید. علاوه بر این‌ها، گاهی هم وزن یک بسته، زمان انجام یک کار، فاصله از جایی یا تعداد اشیای داخل یک بسته را لازم داریم. در این موارد نیز با تخمین سروکار داریم؛ منتها با تخمین در اندازه یا تعداد.

لازم است بتوانیم به جای عددهای اصلی، عددهای تقریبی مناسبی را جایگزین کنیم. در این شماره و شماره‌ی آینده با تخمین و انواع آن آشنا می‌شویم: تخمین در انجام چهار عمل اصلی اعداد (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد صحیح و اعشاری و کسری)؛ تخمین در شمارش تعداد؛ تخمین در اندازه‌گیری. همچنین، با مرور مطالب شش کتاب ریاضی دوره‌ی ابتدایی، روند آشنایی دانش‌آموزان با تخمین در دوره‌ی ابتدایی را در جدولی بررسی خواهیم کرد.

توانایی «تخمین» یکی از توانایی‌های فرایندی در ریاضیات است که نه تنها در اصول و استانداردهای آموزشی بسیاری از کشورها، که در برنامه‌ی درسی ملی ایران نیز بر آن تأکید شده است. در برنامه‌ی درسی ملی ایران، در بخش مربوط به قلمرو حوزه‌ی ریاضیات، از **تخمین زدن و دقت یافتن** به‌عنوان دو فرایند از فرایندهای ریاضی نام برده شده است که دانش‌آموزان باید با آن‌ها آشنا شوند و در آن‌ها مهارت یابند. «محاسبات تخمینی» از مهارت‌های سطح بالا در تفکر است که به تصمیم‌گیری‌های زیادی نیاز دارد. اول، باید تصمیم گرفت چه موقع به جای محاسبات دقیق، حاصل تخمینی را به‌دست آورد (این تصمیم به زمینه‌ی مسئله‌ی موردنظر وابسته است)؛ دوم، باید تصمیم گرفت با کدام روش حاصل تخمینی موردنظر را به دست آورد (این تصمیم به نوع محاسبات یا نوع تخمین و دقتی که لازم داریم مرتبط است)؛ و بالاخره، باید تصمیم گرفت مقدار تخمینی به دست آمده تا چه اندازه مناسب است و چقدر به مقدار واقعی نزدیک است (این موضوع به درک عددی ما وابسته است).

در مطلب شماره‌ی گذشته‌ی این مجله، با مفهوم تقریب‌زدن آشنا شدیم و انواع روش‌های تقریب را مرور کردیم، زیرا بسیاری مواقع، برای تخمین در محاسبات،

تخمین در محاسبات چهار عمل اصلی

عبارت زیر را ببینید:

$$(752 - 3 \times 14) \div 71$$

شما چگونه حاصل این عبارت را به دست می آورید؟ خُب، یک راه این است که از همه ی الگوریتم‌هایی که برای چهار عمل اصلی یاد گرفته‌اید استفاده کنید و بدون فکر یا خلاقیت، تنها عملیات خواسته شده را به ترتیب اولویت قرار داده شده در عبارت‌های ریاضی انجام دهید: یعنی اول ضرب 3×14 ، بعد تقریق حاصل ضرب به دست آمده از ۷۵۲، و بالاخره تقسیم عدد به دست آمده بر ۷۱. برای این کار به مداد و کاغذ نیاز دارید. اما یکی از موضوعاتی که امروزه در آموزش ریاضیات به کودکان بسیار مورد توجه است، این است که به کودکان اجازه بدهیم راهبردهای شخصی خودشان را برای محاسبات چهار عمل اصلی بسازند و از آن‌ها استفاده کنند. بگذارید من راهبرد شخصی خودم برای یافتن حاصل عبارت بالا را به شما نشان بدهم تا متوجه منظورم بشوید. تصویر مقابل را ببینید.

ممکن است بگویید همیشه به این خوش‌شانسی نخواهم بود که بتوانم محاسبات را با چنین راهبردهایی انجام بدهم. این حرف می‌تواند درست باشد، ولی در مواردی که بتوان با میان‌برهایی

محاسبات تخمینی و محاسبات ذهنی

دو مهارت متفاوت هستند، ولی به هم بسیار وابسته‌اند. برای انجام محاسبات تخمینی، با اعدادی که کار کردن با آن‌ها برایمان ساده‌تر است، محاسبات ذهنی انجام می‌دهیم.

شخصی محاسبات را ذهنی و سریع‌تر از انجام الگوریتم‌های استاندارد انجام داد، خوب است که چنین عمل کنیم. باز ممکن است بگویید چه نیازی هست که وقت و فکرمان را برای کشف و انجام راهبردهای شخصی هدر دهیم؟ کمترین نفع چنین کاری، کمک به محاسبات تخمینی است که همه روزه درگیر آن‌ها هستیم. موضوع اصلی این مطلب تخمین است و صحبت از راهبردهای شخصی برای یافتن مقدار دقیق عبارت‌هایی ربط به نظر می‌رسد. اما این موضوع را مطرح کردیم تا به این نکته‌ی مهم اشاره کنیم که همان قدر که در خلق راهبردهای شخصی باید درک خوبی از عددها داشته باشیم و ارتباط بین عددها را بشناسیم، یعنی «حس عددی» خوبی داشته باشیم، برای تخمین در محاسبات نیز نیازمند حس عددی هستیم. در ادامه‌ی این مطلب، چند روش در تخمین محاسبات با عددهای صحیح آمده است.

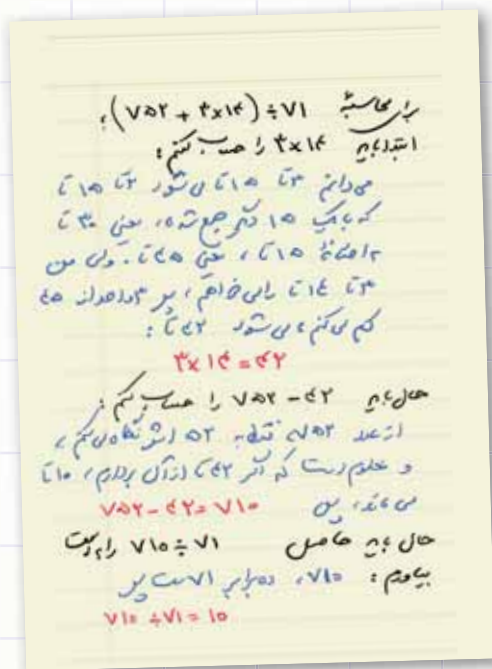


با انواع تخمین آشنا شوید

۱. تخمین در اندازه؛ یعنی بدون اندازه‌گیری دقیق، اندازه‌ی موردنظر را به صورت تقریبی بیان کنیم. مانند طول یک راهرو یا وزن یک بسته یا زمان رسیدن به یک محل.

۲. تخمین در تعداد؛ یعنی بدون شمارش دقیق، تعداد اعضای یک مجموعه را بیان کنیم. مانند تخمین تعداد دانش‌آموزان یک کلاس یا تعداد میوه‌های داخل یک ظرف.

۳. تخمین در محاسبات؛ یعنی بدون انجام محاسبات دقیق، حاصل یک عبارت را به صورت تقریبی به دست بیاوریم.



تخمین حاصل جمع: برای تخمین حاصل جمع دو یا چند عدد، چند روش وجود دارد:

● عددهای مورد نظر را با تقریب مناسب گرد می‌کنیم و حاصل عددهای گرد شده را به دست می‌آوریم. مثال:

$$۷۵۶ + ۱۲۷ \approx ۸۰۰ + ۱۰۰ = ۹۰۰$$

پس حاصل $۷۵۶ + ۱۲۷$ تقریباً ۹۰۰ است.

● ابتدا عددها را با تقریب مناسب قطع می‌کنیم و حاصل عددهای قطع شده را به دست می‌آوریم. برای اینکه خطای محاسبه کمتر باشد، مقادیر قطع شده را نیز به صورت تقریبی با هم جمع می‌کنیم. مثال:

$$\begin{aligned} ۷۵۶ + ۱۲۷ &\approx ۷۰۰ + ۱۰۰ = ۸۰۰ & \text{اول} \\ ۵۶ + ۲۷ &\approx ۶۰ + ۳۰ = ۹۰ & \text{دوم} \\ ۷۵۶ + ۱۲۷ &\approx ۸۰۰ + ۹۰ = ۸۹۰ & \text{پس} \end{aligned}$$

می‌بینید که حاصل‌های ۹۰۰ و ۸۹۰ (از دو روش بالا) خیلی به هم نزدیک‌اند.

● عددها را بر اساس شناختی که از اعداد داریم گروه‌بندی و پس از آن جمع می‌کنیم. این روش برای یافتن حاصل جمع چند عدد مناسب است. مثال:

$$۱۷ + ۳۳ + ۵۶ + ۱۴ = ۲۰ + ۳۰ + ۶۰ + ۱۰ = ۱۲۰$$

این روش به محاسبات ذهنی بسیار شبیه است. اگر عددها این طور با هم جور نباشند، تخمین و تقریب خود را نشان می‌دهند. مثال:

$$۱۷ + ۳۴ + ۵۵ + ۱۶ \approx ۱۷ + ۳۳ + ۵۵ + ۱۵ = ۲۰ + ۳۰ + ۶۰ + ۱۰ = ۱۲۰$$

تخمین در تفریق و ضرب و تقسیم: مشابه جمع، روش‌های متعددی برای تخمین در یافتن حاصل تفریق یا حاصل ضرب یا حاصل تقسیم دو عدد وجود دارد. مهم‌ترین آن‌ها که در کتاب‌های درسی ابتدایی نیز معرفی شده، این است که عددها را با تقریب مناسبی گرد کنید و اعداد گرد شده را در محاسبات استفاده کنید. این مثال‌ها را ببینید:

$$\begin{aligned} ۱۷۶ - ۲۷ &\approx ۲۰۰ - ۳۰ = ۱۷۰ \\ ۱۷۶ \times ۲۷ &\approx ۲۰۰ \times ۳۰ = ۶۰۰۰ \\ ۱۷۶ \div ۲۷ &\approx ۱۸۰ \div ۳۰ = ۶ \end{aligned}$$

● روش دیگری که در تفریق و تقسیم خیلی کاربرد دارد، این است که عدد دوم را به عددی نزدیک کنیم که عملیات با آن راحت‌تر باشد. مثال‌های زیر را ببینید:

$$۱۲۴ - ۷۶ \approx ۱۲۴ - ۷۴ = ۵۰$$

اگر به جای ۷۶ داشته باشیم، تفریق راحت‌تر است، زیرا ۴ ها با هم می‌روند.

$$۴۸ \div ۹ \approx ۴۸ \div ۸ = ۶$$

اگر به جای ۹ ، ۸ داشته باشیم، تقسیم راحت‌تر انجام می‌شود.

● روش دیگری که در تقسیم کاربرد دارد، این است که تقسیم را به صورت ضرب در نظر بگیریم و ببینیم عدد مجهول ما به چه عددی نزدیک‌تر است؟ مثال زیر را ببینید:

حاصل تقسیم $۳۴۲ \div ۷۱$ را می‌خواهیم. در واقع، دنبال عددی هستیم که اگر در ۷۰ ضرب شود، حاصل ۳۴۲ شود: $\square \times ۷۱ = ۳۴۲$. می‌دانیم که ۳۵۰ مضربی از ۷۰ است و از ضرب ۵ در ۷۰ به دست می‌آید. از طرف دیگر، ۳۴۲ تقریباً با ۳۵۰ برابر است و ۷۱ تقریباً با ۷۰ . پس حاصل $۳۴۲ \div ۷۱$ تقریباً برابر ۵ است:

$$۳۴۲ \div ۷۱ \approx ۵$$

نقد دوستانه

کتاب‌های ریاضی شش پایه‌ی ابتدایی را صفحه به صفحه و خط به خط بررسی کردیم و تمام موضوعاتی را که به شکلی به تقریب و تخمین ارتباط دارند، به طور خلاصه در جدول نوشتیم. البته ممکن است قسمت‌هایی از چشم ما دور مانده باشند. لطفاً شما جدول را به دقت کامل کنید. آنچه در این بررسی جلب توجه می‌کند، این است که در ریاضیات دوره‌ی ابتدایی کشور ما، به آموزش تخمین در شمارش تعداد و تخمین در اندازه‌گیری خیلی کم پرداخته شده است. همچنین، در تخمین در محاسبات، اصلاً محاسبات تخمینی با عددهای کسری وجود ندارند و محاسبات تخمینی با عددهای اعشاری نیز بسیار محدودند. محاسبات تخمینی چهار عمل اصلی عددهای طبیعی که از پایه‌ی دوم در کتاب ریاضی آمده است، بدون برنامه‌ی منسجمی، در پایه‌های سوم تا پنجم کم‌رنگ می‌شود و فصل هفتم کتاب ششم که موضوعش فقط «تقریب» است، به تقریب زدن‌های پایه‌های قبل متصل و مرتبط نمی‌شود. موضوعات این مجموعه نوشته‌ها، آشنایی معلمان با تقریب و تخمین و استفاده‌ی آگاهانه‌ی آن‌ها از موقعیت‌های مختلف برای توسعه‌ی توانایی تخمین در دانش‌آموزان را بیشتر می‌کند.

تخمین در محاسبات چه ویژگی‌هایی دارد؟

۱. به صورت ذهنی و بدون نیاز به محاسبه روی کاغذ انجام می‌شود؛
۲. به سرعت انجام می‌شود؛
۳. جواب‌هایی به ما می‌دهد که برای تصمیم‌گیری ما کافی هستند؛ حتی اگر دقیق نباشند.

برای تخمین خوب و مناسب چه توانایی‌هایی لازم دارید؟

برای اینکه بتوانید تخمین‌های خوبی بزنید، باید «حس عددی» خود را تقویت کنید؛ یعنی درک خوبی از بزرگی عددها داشته باشید. همچنین، در تخمین اندازه‌ها، باید واحدهای اندازه‌گیری و بزرگی آن‌ها را به خوبی بشناسید.

جدول موضوعات مرتبط با تخمین و تقریب در کتاب‌های ریاضی ابتدایی

پایه	صفحه	موضوع
دوم	۸	حس بزنی پایین صفحه، که تخمین تعداد است.
	۲۰-۲۲	«جمع و تفریق ده‌تایی» برای توسعه‌ی توانایی محاسبات ذهنی که در محاسبات تخمینی استفاده می‌شود.
	۲۲	یافتن مکان تقریبی یک عدد روی محور.
	۳۰	یافتن مکان تقریبی یک عدد روی محور و توجه به مناسب بودن تقریب با بررسی «نزدیک بودن» به عددهای دیگر.
	۳۳	تقریب اعداد و یافتن حاصل جمع یا حاصل تفریق.
	۶۴-۶۵	عددهای سهرقمی تقریبی و تقریب‌زدن با روش قطع کردن.
	۶۶-۶۹	جدول ضرب‌های ده و فعالیت‌هایی برای جمع ضرب‌های ده به منظور توسعه‌ی توانایی محاسبات ذهنی که در محاسبات تخمینی استفاده می‌شود. (تمرین‌های ۴ و ۵ ص ۶۹ درباره‌ی تقریب به روش قطع کردن و یافتن حاصل جمع یا تفریق تقریبی است).
	۷۴-۷۹	موضوع اصلی این صفحات، واحدهای استاندارد اندازه‌گیری و تقسیم واحد اصلی به واحدهای کوچک‌تر برای بالا بردن «دقت» در اندازه‌گیری است. می‌بینید که کاملاً با موضوع اندازه‌گیری تخمینی در هم تنیده می‌شود. موضوع دقت در اندازه‌گیری در صفحه‌های ۸۰ تا ۸۷ و در معرفی واحدهای سانتی‌متر و میلی‌متر نیز ادامه دارد.
	۹۶-۹۷	روش محاسبات ذهنی که در محاسبات تخمینی استفاده می‌شود.
	۱۳۶-۱۳۸	استفاده از تقریب در ترسیم نمودارهای آماری.
سوم	۳۷	یافتن مکان تقریبی یک عدد روی محور؛ تقریب به روش قطع کردن.
	۴۰	تمرین‌های ۴ و ۵ که درباره‌ی تخمین در اندازه‌گیری هستند.
	۴۸	تمرین‌های ۱ و ۴ که در واقع درباره‌ی تخمین در اندازه‌گیری هستند تا به کمک آن کسرهای شکل‌ها را بیان کنند.
	۱۰۰	استفاده از روش قطع کردن و عددهای تقریبی برای مقایسه‌ی اعداد چندرقمی.
	۱۰۲	استفاده از روش قطع کردن و عددهای تقریبی برای یافتن حاصل جمع و تفریق اعداد چندرقمی.
	۱۰۴	توسعه‌ی توانایی محاسبات ذهنی که در محاسبات تخمینی استفاده می‌شود.
	۱۴۰ و ۱۴۳	یافتن حاصل ضرب تقریبی.
	۱۴۱	توسعه‌ی توانایی محاسبات ذهنی که در محاسبات تخمینی استفاده می‌شود.
	۵۵	تمرین‌های ۱ و ۳ که می‌توانند برای توسعه‌ی روش محاسبات ذهنی در ضرب که در محاسبات تخمینی استفاده می‌شود، به کار روند.
	۵۶-۵۹	تقریب اعداد با روش گرد کردن؛ محاسبات تخمینی (ضرب و تقسیم) با اعداد تقریبی؛ نمایش تقریبی اعداد روی محور.
چهارم	۹۰	یافتن مکان تقریبی یک عدد اعشاری روی محور و افزایش دقت نمایش با تقسیم کردن واحدها به قسمت‌های کوچک‌تر.
	۹۴	جمع تقریبی اعداد اعشاری با روش قطع کردن بخش اعشار.
	۹۶	فعالیت ۲ که درباره‌ی حاصل تقریبی تفریق است.
	۹۹-۱۰۰	حاصل ضرب اعداد اعشاری در ضرب‌های ده که به توسعه‌ی توانایی محاسبات ذهنی مورد استفاده در محاسبات تخمینی کمک می‌کند.
	۱۲۶-۱۳۳	استفاده از عددهای تقریبی در آمار.
	۴۶	تمرین ۵ که درباره‌ی جمع و تفریق ذهنی اعداد اعشاری است و در محاسبات تخمینی استفاده می‌شود.
	۴۸-۵۰	فعالیت‌هایی درباره‌ی ضرب و تقسیم ذهنی اعداد اعشاری که در محاسبات تخمینی استفاده می‌شود.
	۸۹	تخمین در اندازه‌گیری (طول).
	۹۶	تخمین در اندازه‌گیری (جرم).
	۹۷	تمرین ۶ که تخمین در اندازه‌گیری (گنجایش) است و تخمین در محاسبات اعشاری.
ششم	۱۰۱	تمرین ۲ که تخمین در اندازه‌گیری (مساحت) است.
	فصل ۷: ص ۱۴۴ تا ۱۳۱	مفهوم تقریب؛ روش قطع کردن؛ روش گرد کردن؛ اندازه‌گیری و محاسبه‌های تقریبی.

منابع
 Teaching
 I. Van de Walle, J.A., Karp K.S., Bay-Williams, J.M., Wray, J. (2013). Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally (eighth edition). NJ: Pearson.
 ۲. ریس، رابرت ای. سایدام، مرلین. ن. لیندکویست، مری مونگوتوری (۱۳۷۷). کمک به کودکان در یادگیری ریاضیات ترجمه‌ی مسعود نوروزیان. انتشارات مدرسه چاپ اول.